

KLEINE BEMERKUNGEN ZU REIHEN SOWIE DIFFERENZEN*

Carl Gustav Jacob Jacobi

Es sei die Reihe

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \dots$$

vorgelegt und man bilde daraus die Reihen der Differenzen, und man notiere den $(n + 1)$ -ten Term der m -ten Reihe der Differenzen mit dem Zeichen

$$\Delta^m A_n.$$

Es ist bekannt, dass zwischen den Termen $\Delta^m A_n$ unzählige *lineare* Relationen statthaben. Natürlich entspringen, nachdem in beliebiger Weise zwischen den beiden Größen A und $A - 1$ Gleichungen bezüglich A angenommen worden sind, derer man ja unendlich viele hat, die einzelnen Gleichungen aus den jeweiligen zwischen den Termen $\Delta^m A_n$. Denn zumal sich eine beliebige ganz rationale Funktion $f(x, y)$ der Größen x und y als lineares Aggregat der Terme $x^n y^m$ annehmen lässt, wird, wenn

$$F(x, y) = (x - y - 1)f(x, y)$$

gesetzt wird, $F(x, y)$ ein solches Aggregat von Termen der Gestalt $x^n y^m$ sein, welches durch Setzen von $x - y - 1 = 0$ oder

$$x = A, \quad y = A - 1$$

*Originaltitel: "De Seriebus Ac Differentiis Observatiunculæ", zuerst publiziert in: *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 36 (1847): pp. 135 – 145, Nachdruck in: G.G.J. Jacobi's gesammelte Werke – Band 6, pp. 174– 183, übersetzt von: Alexander Aycok für den "Euler-Kreis Mainz".

verschwindet. Nun sage ich, was mit bekannten Prinzipien bewiesen werden kann, dass die Gleichung $F(x, y) = 0$ oder $F(A, A - 1) = 0$ auch dann statthat, wenn in den einzelnen Produkten $A^m(A - 1)^n$ die jeweiligen Differenzenterme $\Delta^m A_n$ eingesetzt werden. Daher hat man diesen Lehrsatz

THEOREM I

Aus jeder beliebigen Gleichung zwischen den Größen A und $A - 1$, welche als eine lineare Gleichung zwischen den Termen $A^n(A - 1)^m$ betrachtet wird, geht eine Differenzenform hervor, solange nur in den einzelnen Termen $A^n(A - 1)^m$ die Differenzen $\Delta^m A_n$ eingesetzt werden.

Das inverse Theorem ist daher klar, dass für $A_n = A^n$ gesetzt

$$\Delta^m A_n = A^n(A - 1)^m$$

wird. Das vorhergehende Theorem gilt auch dann, wenn die Terme $\Delta^m A_n$ ins Unendliche laufen, solange sie nur in einer gewissen Reihenfolge fortschreitend konvergieren. Aus einer jeden Gleichung zwischen den Größen A und $A - 1$, wenn für A folgend $-(A - 1)$ eingesetzt wird, wird eine ähnliche Gleichung zwischen den Größen $-(A - 1)$ und $-A$ abgeleitet. Wenn also der vorgelegten Gleichung die Form einer linearen Gleichung zwischen den Größen $A^n(A - 1)^m$ aufgeprägt wird, wird aus ihr eine andere erhalten, indem man anstelle eines jeden Terms $A^n(A - 1)^m$ den Term $(-1)^{m+n} A^m(A - 1)^n$ setzt. Daher entspringt

THEOREM II

Aus einer beliebigen linearen Relation zwischen den Differenzen $\Delta^m A_n$ wird eine andere erhalten, wenn anstelle des Terms $\Delta^m A_n$ der Term

$$(-1)^{m+n} \Delta^n A_m$$

gesetzt wird.

Die zwei elementaren Formeln

$$\begin{aligned} \Delta^m A_0 &= A_m - mA_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} A_{m-2} - \cdots \pm A_0 \\ A_m &= \Delta_m A_0 + m\Delta^{m-1} A_0 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Delta^{m-2} A_0 + \cdots + A_0, \end{aligned}$$

folgen nach Theorem II jeweils auseinander. Nach Theorem I findet man die eine aus der Entwicklung der Potenz $(A - 1)^m$, die andere aus der Entwicklung der Potenz $(A - 1 + 1)^m$. Ich übergehe weitere verschiedene Beispiele, mit denen das allgemeine Theorem I illustriert werden kann. Ich möchte nur einen knappen Beweis zweier außerordentlicher Formeln hinzufügen, welche EULER einst in seinem *Calculo Differentiali* angegeben hat. EULER hat mit

$$x = \frac{y}{1+y} \quad \text{oder} \quad y = \frac{x}{1-x}$$

gefunden, dass gilt:

$$A_0x + A_1x^2 + A_2x^3 + A_3x^4 + \dots = A_0y + \Delta A_0 \cdot y^2 + \Delta^2 A_0 \cdot y^3 + \Delta^3 A_0 \cdot y^4 + \dots$$

Diese Transformation folgt aus der Formel

$$\frac{x}{1-Ax} = \frac{y}{1-(A-1)y},$$

nachdem die eine Funktion nach aufsteigenden Potenzen von x , die andere nach aufsteigenden Potenzen von y entwickelt worden ist und gemäß Theorem I anstelle der Größen A^n und $(A-1)^n$ die Terme A_n und $\Delta^n A_0$ gesetzt worden sind.

Zweitens hat EULER mit

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$

und

$$S = aA_0 + bA_1x + cA_2x^2 + dA_3x^3 + \dots$$

gefunden, dass gilt

$$\begin{aligned} S = A_0f(x) + \Delta A_0 \cdot x \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{1 \cdot 2} \Delta^2 A_0 \cdot x^2 \frac{d^2f(x)}{dx^2} \\ + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 A_0 \cdot x^3 \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots \end{aligned}$$

Der Beweis der Transformation geht aus der Formel

$$f(Ax) = f(x + (A-1)x)$$

hervor, nachdem die eine Seite mithilfe des TAYLOR'schen Satzes nach Potenzen von Ax , die andere nach Potenzen von $(A - 1)x$ entwickelt worden ist, und dann A^n , $(A - 1)^n$ in A_n , $\Delta^n A_n$ geändert worden sind.

Nach Vorlage der Reihe

$$1, \quad \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}, \quad \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}, \dots$$

wird die *erste* Reihe der Differenzen

$$\frac{\beta-\gamma}{\gamma}, \quad \frac{\beta-\gamma}{\gamma} \frac{\beta}{\gamma+1}, \quad \frac{\beta-\gamma}{\gamma} \frac{\beta(\beta+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}, \quad \frac{\beta-\gamma}{\gamma} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}, \dots,$$

die *zweite*

$$\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}, \quad \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{\beta}{\gamma+2}, \quad \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{\beta(\beta+1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \dots,$$

und so weiter. Wenn wir im Allgemeinen die Terme der vorgelegten Reihe mit

$$A_n = \frac{\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)}$$

bezeichnen, wird

$$\Delta^m A_0 = \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1) \cdots (\beta-\gamma-m+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+m-1)}$$

sein und allgemeiner

$$\Delta^m A_n = \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1) \cdots (\beta-\gamma-m+1) \cdot \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \cdots (\gamma+m+n-1)}.$$

Daher findet man

THEOREM III

Welche lineare Gleichung auch immer zwischen den Größen $A^n(A-1)^m$ statthat, sie bleibt richtig, wenn in ihr für $A^n(A-1)^m$ die Größen

$$\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1) \cdots (\beta-\gamma-m+1) \cdot \beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \cdots (\gamma+m+n-1)}$$

eingesetzt werden, während β und γ irgendwelche Größen bezeichnen.

Wir wollen diese Proposition auf die Gleichung anwenden, welche aus der Entwicklung der gleichen Brüche

$$\frac{1}{(1 - Ax)^\alpha} = \frac{1}{(1 - x - (A - 1)x)^\alpha}$$

hervorgeht oder, wenn es mehr beliebt, im zweiten *Euler'schen* Theorem $f(x) = (1 - x)^{-\alpha}$ setzen und $A_n, \Delta^m A_0$ die oben angegebenen Werte zuteilen. Es kommt die bekannte Formel

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdot \beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdot \beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)} x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{(1 - x)^\alpha} \left\{ 1 + \frac{\alpha \cdot (\beta - \gamma)}{1 \cdot \gamma} \frac{x}{1 - x} + \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdot (\beta - \gamma)(\beta - \gamma - 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} \frac{x^2}{(1 - x)^2} + \dots \right\} \end{aligned}$$

heraus. Die in Klammern eingeschlossene Reihe geht aus der vorgelegten durch Setzen von α anstelle von β , $\gamma - \beta$ anstelle von α , $\frac{x}{x-1}$ anstelle von x hervor. Nachdem diese also gleichermaßen wie die vorgelegte transformiert worden ist, wird man

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\alpha \cdot (\beta - \gamma)}{1 \cdot \gamma} \frac{x}{1 - x} + \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdot (\beta - \gamma)(\beta - \gamma - 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} \frac{x^2}{(1 - x)^2} + \dots \\ &= \frac{1}{(1 - x)^{\beta - \gamma}} \left\{ 1 + \frac{(\beta - \gamma) \cdot (\alpha - \gamma)}{1 \cdot \gamma} x + \frac{(\beta - \gamma)(\beta - \gamma - 1) \cdot (\alpha - \gamma)(\alpha - \gamma - 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} x^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

erhalten. Nach Verbinden zweier Transformationen findet man die berühmte *EULER'sche* Formel

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdot \beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdot \beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)} x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{(1 - x)^{\alpha + \beta - \gamma}} \left\{ 1 + \frac{(\beta - \gamma) \cdot (\alpha - \gamma)}{1 \cdot \gamma} x + \frac{(\beta - \gamma)(\beta - \gamma - 1) \cdot (\alpha - \gamma)(\alpha - \gamma - 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} x^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

(Siehe *Institutiones calculi integralis*, Buch IV, S. 245; *Nova Acta Academiae scientiarum Petropolitanae*, Buch XII, S. 58.)

Der Beweis dieser Transformationen, welcher im Vorausgehenden präsentiert worden ist, geht auf den zurück, welchen der hoch geehrte Herr PFAFF zu

Beginn des Jahres 1797 in der Abhandlung *Observationes analyticae ad L. Euleri institutionum calculi integralis Vol. IV, Supplem. II et IV.* gegeben hat, welchem dem *Supplemento Historiae tomi XI Novorum Actorum Academiae scientiarum Petropolitanae* beigelegt worden ist. Nämlicher Herr hat an selber Stelle einen Beweis der anderen EULER'schen Formel hinzugefügt, welcher auf dem folgenden eleganten Lemma basiert:

Für eine positive ganze Zahl l und $s = l + m + n + p - 1$ gesetzt wird

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{l \cdot m \cdot n}{1 \cdot p \cdot s} + \frac{l(l-1) \cdot m(m-1) \cdot n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot p(p+1) \cdot s(s-1)} + \dots \\
&= \frac{(p+m)(p+m+1) \dots (p+m+l-1) \cdot (p+n)(p+n+1) \dots (p+n+l-1)}{p(p+1) \dots (p+l-1) \cdot (p+m+n)(p+m+n+1) \dots (p+m+n+l-1)} \\
&= \frac{\Pi(p-1)\Pi(s-l)\Pi(s-m)\Pi(s-n)}{\Pi(p+l-1)\Pi(p+m-1)\Pi(p+n-1)\Pi(s)}
\end{aligned}$$

Dieses Lemma hat der hoch geehrte Herr PFAFF bewiesen, wenn es für einen Wert von l gilt, genauso für einen um die Einheit größeren Wert als l zu gelten, woher folgt, dass es für jeden ganzen positiven Wert von l gilt, weil es für $l = 1$ unmittelbar klar ist. Aber mithilfe dieses Lemmas hat der hoch geehrte Herr PFAFF durch Multiplizieren mit dem in eine Reihe entwickelten Faktor $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$ bewiesen, dass die EULER'sche Formel hervorgeht.

Das erwähnte Lemma, welches leicht ersichtlich ist, nicht auf positive ganzzahlige Werte von beschränkt zu sein, kann aus der Transformation der allgemeineren Reihe

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \lambda}{1 \cdot \gamma \cdot \nu} + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1) \cdot \lambda(\lambda+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1) \cdot \nu(\nu+1)} + \dots$$

abgeleitet werden, welche der hoch geehrte Herr KUMMER in *Diar. Crell. Band XV S. 172* gegeben hat. Es gefällt aber, bei dieser Gelegenheit den an allzu verstecktem Ort veröffentlichten Artikel des hoch geehrten Herrn PFAFF aus der Vergessenheit emporgeholt zu haben. Ich füge hinzu, dass er ebenda in gefälliger Weise die angegebenen Transformationen der Transzendenten

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

darbietet, während natürlich die Formeln der zwei Größen r und r' eine Vertauschung gestatten

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1+x)^r} \left\{ 1 + \frac{r \cdot (p+r')}{1 \cdot p} x + \frac{r(r-1) \cdot (p+r')(p+r'+1)}{1 \cdot 2 \cdot p(p+1)} x^2 + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{(1+x)^{r'}} \left\{ 1 + \frac{r' \cdot (p+r)}{1 \cdot p} x + \frac{r'(r'-1) \cdot (p+r)(p+r+1)}{1 \cdot 2 \cdot p(p+1)} x^2 + \dots \right\} \\
&= 1 + \frac{r \cdot r'}{1 \cdot p} \frac{x}{1+x} + \frac{r(r-1) \cdot r'(r'-1)}{1 \cdot 2 \cdot p(p+1)} \frac{x^2}{(1+x)^2} + \dots
\end{aligned}$$

Diese Transformationen für Werte, welche zumindest gewisse Grenzen für die Konstanten nicht überschreiten, folgen klar ersichtlich aus dem Ausdruck der Transzendenten dargestellt über bestimmte Integrale, welche von EULER in *Inst. Calc. Int.* angegeben worden sind.

Zusätzlich zum Vorhergehenden lege ich nun dieses Theorem über Reihen und Differenzen vor, welches auch allgemeiner als Proposition I ist:

THEOREM IV

Es sei diese Reihe vorgelegt

$$A_l, \quad A_{l+1}, \dots, A_{l+m}$$

und ihre m -te Differenz mit $A_{l,m}$ bezeichnet; von der Reihe

$$A_{l,m}, \quad A_{l,m+1}, \dots, A_{l,m+n}$$

bezeichne man die n -te Differenz mit $A_{l,m,n}$; von der Reihe

$$A_{l,m,n}, \quad A_{l,m,n+1}, \dots, A_{l,m,n+p}$$

bezeichne man die p -te Differenz mit $A_{l,m,n,p}$ und so weiter; während mit diesen Festlegungen eine beliebige identische Gleichung zwischen den Größen

$$A, \quad A-1, \quad A-2, \quad A-3, \dots$$

statthat und als eine lineare Gleichung zwischen Größen von dieser Art

$$A^l (A-1)^m (A-2)^n (A-3)^p \dots$$

dargeboten wird, lassen sich in jenen Größen nachstehende Terme einsetzen

$$A_{l,m,n,p,\dots}$$

Ich werde das angegebene Theorem an wenigen Beispielen illustrieren.

Für

$$y = \log(1+x)$$

wird

$$\begin{aligned} e^{Ay} &= 1 + Ay + A^2 \frac{y^2}{2} + A^3 \frac{y^3}{2 \cdot 3} + \dots \\ &= 1 + Ax + A(A-1) \frac{x^2}{2} + A(A-1)(A-2) \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots \\ &= (1+x)^1 \left\{ 1 + (A-1)x + (A-1)(A-2) \frac{x^2}{2} + (A-1)(A-2)(A-3) \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots \right\} \\ &= (1+x)^2 \left\{ 1 + (A-2)x + (A-2)(A-3) \frac{x^2}{2} + (A-2)(A-3)(A-4) \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots \right\} \end{aligned}$$

und so weiter. Daher folgt nach der angeführten Proposition, dass für $y = \log(1+x)$ wird

$$\begin{aligned} &1 + A_1 y + A_2 \frac{y^2}{2} + A_3 \frac{y^3}{2 \cdot 3} + \dots \\ &= 1 + A_1 x + A_{1,1} \frac{x^2}{2} + A_{1,1,1} \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots \\ &= (1+x)^1 \left\{ 1 + A_{0,1} x + A_{0,1,1} \frac{x^2}{2} + A_{0,1,1,1} \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots \right\} \\ &= (1+x)^2 \left\{ 1 + A_{0,0,1} x + A_{0,0,1,1} \frac{x^2}{2} + A_{0,0,1,1,1} \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots \right\} \end{aligned}$$

und so weiter.

Der hoch geehrte Herr STIRLING hat vor einiger Zeit in seiner *Methodo differentiali* die Formeln

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-A} &= \frac{1}{x} + \frac{A}{x^2} + \frac{A^2}{x^3} + \frac{A^3}{x^4} + \dots \\
&= \frac{1}{x} + \frac{A}{x(x-1)} + \frac{A(A-1)}{x(x-1)(x-2)} + \frac{A(A-1)(A-2)}{x(x-1)(x-3)} + \dots \\
&= \frac{1}{x-1} + \frac{A-1}{(x-1)(x-2)} + \frac{(A-1)(A-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{(A-1)(A-2)(A-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} + \dots \\
&= \frac{1}{x-2} + \frac{A-2}{(x-2)(x-3)} + \frac{(A-2)(A-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)} + \frac{(A-2)(A-3)(A-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} + \dots,
\end{aligned}$$

und so weiter angegeben. Aus diesen gehen durch die angegebene Proposition die folgenden hervor:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x^3} + \frac{A_3}{x^4} + \dots \\
&= \frac{1}{x} + \frac{A_1}{x(x-1)} + \frac{A_{1,1}}{x(x-1)(x-2)} + \frac{A_{1,1,1}}{x(x-1)(x-2)(x-3)} + \dots \\
&= \frac{1}{x-1} + \frac{A_{0,1}}{(x-1)(x-2)} + \frac{A_{0,1,1}}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{A_{0,1,1,1}}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} + \dots \\
&= \frac{1}{x-2} + \frac{A_{0,0,1}}{(x-2)(x-3)} + \frac{A_{0,0,1,1}}{(x-2)(x-3)(x-4)} + \frac{A_{0,0,1,1,1}}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} + \dots,
\end{aligned}$$

und so weiter. Eine allgemeinere Formel findet man wie folgt.

Nach Vorgabe einer Funktion $f(x)$ bilde man die Reihe

$$f(x), \quad f(2x), \quad f(3x), \quad f(4x), \dots$$

und ihre ersten, zweiten, dritten etc. Differenzen. Wenn die ersten Terme dieser Reihen mit

$$\nabla^1 f(x), \quad \nabla^2 f(x), \quad \nabla^3 f(x), \dots$$

bezeichnet werden, hat man die bekannte Interpolationsformel

$$f(Ax) = f(x) + (A-1)\nabla^1 f(x) + \frac{(A-1)(A-2)}{1 \cdot 2} \nabla^2 f(x) + \dots$$

Daher entspringt vermöge Theorem IV dieses:

THEOREM V

Es sei eine beliebige Reihe

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \dots$$

gegeben und es sei

$$a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = f(x),$$

weiter sei

$$A_0a + A_1a_1x + A_2a_2x^2 + A_3a_3x^3 + \dots = S;$$

nach Vorgabe der Werte der Größen

$$f(x), \quad f(2x), \quad f(3x), \quad f(4x), \dots,$$

bilde man die erste, zweite, dritte etc. Reihe der Differenzen dieser Größen; wenn die ersten Terme von diesen

$$\nabla^1 f(x), \quad \nabla^2 f(x), \quad \nabla^3 f(x), \dots$$

genannt werden, wird

$$S = A_0f(x) + A_{0,1}\nabla^1 f(x) + \frac{1}{1 \cdot 2}A_{0,1,1}\nabla^2 f(x) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}A_{0,1,1,1}\nabla^3 f(x) + \dots$$

Die Formel, welche im vorhergehenden Theorem vorgelegt wird, ist analog zur oben gegebenen EULER'schen, natürlich nehmen den Platz der *Differentiale* der Funktion $f(x)$ in der EULER'schen Formel in dieser Formel die ersten Terme der Reihen der *Differenzen* ein, welche über die Reihe $f(x), f(2x), f(3x)$ etc. abgeleitet werden. Es ist ersichtlich, dass durch Setzen von

$$\Delta^i A_0 = B_i, \quad \Delta^i B_0 = C_i, \quad \Delta^i C_0 = D_i, \dots$$

in Theorem V, wenn irgendwann zu einer entweder ganz verschwindenden oder in verschwindende Größen übergehenden Reihe gelangt wird, eine endliche Summe der Reihe S erhalten wird.

Berlin, den 25. Juli 1847.